

Aufgaben zu IV Koordinatengeometrie

A1: Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(0|0|2)$, und $C(0|4,8|0)$.

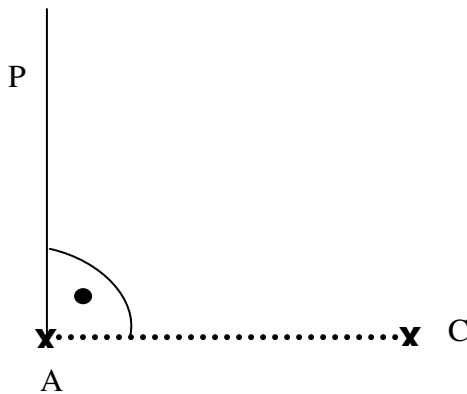
a) Begründen Sie, dass die Punkte A und C mit jedem von A verschiedenen Punkt $P(x_1|0|2)$ ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

b) Berechnen Sie dann den Wert $x_1 > 0$ so, dass das Dreieck zudem gleichschenkelig ist; dieses Dreieck wird mit ACD bezeichnet.

A2: Das Dreieck ACD aus A1 wird zu einem Quadrat ACKD ergänzt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes K und des Diagonalschnittpunktes M.

Lösungen zu A1 und A2:

A1 a)

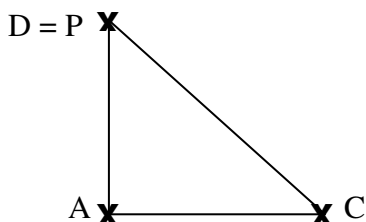


Es muss gelten: $\vec{AC} \cdot \vec{AP} = 0$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 4,8 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4,8 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{AP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

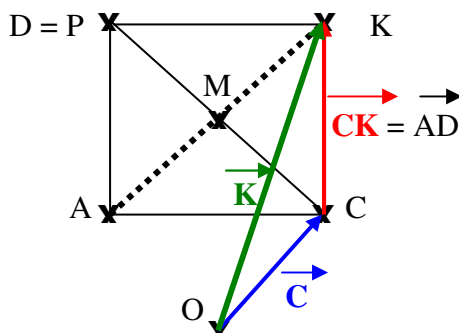
Skalarprodukt: $\vec{AC} \cdot \vec{AP} = 0 \cdot x_1 + 4,8 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \text{Behauptung}$

b) Damit das ΔACD gleichschenkelig ist, muss gelten: $|\vec{AC}| = |\vec{AD}|$



$$|\vec{AC}| = \sqrt{4,8^2 + (-2)^2} = 5,2 \quad |\vec{AD}| = \sqrt{x_1^2} = x_1 \quad (\text{da } x_1 > 0) \quad D(5,2|0|2)$$

A2:



$$\vec{K} = \vec{C} + \vec{CK} = \vec{C} + \vec{AD} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4,8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,2 \\ 4,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

K(5,2|4,8|0)

Entsprechend finden wir den Punkt M : z.B. $\vec{M} = \vec{C} + \frac{1}{2}\vec{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4,8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5,2 \\ -4,8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 \\ 2,4 \\ 1 \end{pmatrix}$

M(2,6/2,4/1)

A3: Der Punkt M(1/2/-3) ist der Mittelpunkt einer Kugel auf deren Oberfläche der Punkt P(-1/1/2) liegt.

a) Stellen Sie die Kugelgleichung auf.

b) Liegt der Punkt Q(3/2/7) im Inneren der Kugel?

Lösung zu A3:

a) Berechne den Abstand von M zu P = r:

$$\vec{MP} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{MP}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30} = r$$

$$\text{Kugelgleichung: } (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 3)^2 = 30$$

$$\text{b) } \vec{MQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{MQ}| = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} > \sqrt{30}$$

d.h. Q liegt im Kugeläußeren

A4: Suchen Sie einen Vektor, der auf $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

Lösung zu A 4: Gesucht ist z. B. der Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) - (-4) \cdot 2 \\ -4 + 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

A5: Gegeben sind die Punkte A(1/0/-1), B(2/0/-5) und C(2/2/-3). Berechnen Sie den Winkel bei A.

$$\text{Lösung zu A5: } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{3 + 0 + 8}{5 \cdot 3} = \frac{11}{15} \Rightarrow \alpha = 42,8^\circ$$

A6: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC aus A5 (vgl A4):

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 4 + 36} = \sqrt{104} \text{ (FE)}$$

A7 : Zusammen mit dem Punkt D(2/-1/-1) bilden die Punkte aus A5 eine dreiseitige Pyramide. Ermitteln Sie das Volumen dieser Pyramide mit den Ecken A, B, C und D.

Lösung zu A7:

$$V_{3\text{-seitige Py}} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |8 - 2| = 1 \text{ (VE)}$$

A8 : Wie lautet die Gleichung einer Kugel mit Radius 2, die alle Koordinatenebenen berührt und deren Mittelpunkt nur positive Koordinaten besitzt.

Lösung zu A8:

z.B. muss die x_3 -Koordinate des Mittelpunktes 2 sein, da der Mittelpunkt 2 Einheiten über der x_1x_2 -Ebene liegt. Dies gilt entsprechend für alle Koordinaten von M $\Rightarrow M(2/2/2)$

$$\text{Kugelgleichung: } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 2^2 = 4$$